HỆ PHƯƠNG TRÌNH

(Ôn thi TRUNG HỌC PHỔ THÔNG QUỐC GIA NĂM 2015)

Biên soạn: Huỳnh Chí Hào - THPT Chuyên Nguyễn Quang Diêu

PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ

Bài 1: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2y^3+12y^2+25y+18=(2x+9)\sqrt{x+4} & (1) \\ \sqrt{3x+1}+3x^2-14x-8=\sqrt{6-4y-y^2} & (2) \end{cases}$

(*Thi thử của THPT Nghi Sơn – Thanh Hóa*)

Bài giải

♥ **Điều kiện:** $\begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{3} \\ 6-4y-y^2 \geq 0 \end{cases}$ (*)

♥ Khai thác phương trình (1) để **tìm hệ thức liên hệ đơn giản của** x **và** y

(sử dụng phương pháp hàm số kiểu $f(u)=f(v)$)

♦ $2y^3+12y^2+25y+18=(2x+9)\sqrt{x+4} \Leftrightarrow 2(y+2)^3+(y+2)=2\left(\sqrt{x+4}\right)^3+\sqrt{x+4}$ (3)

[Tại sao ?]

♦ **Xét hàm đặc trưng** $f(t)=2t^3+t$ trên $\mathbb{R}$ ta có:

$f'(t)=6t^2+1>0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Nên: $(3) \Leftrightarrow f(y+2)=f\left(\sqrt{x+4}\right) \Leftrightarrow y+2=\sqrt{x+4} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -2 \\ (y+2)^2=x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -2 \\ x=4y+y^2 \end{cases}$ (4)

♥ **Thế** (4) vào (2) để được phương trình một ẩn

$$\sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8=0 \quad (5)$$

♦ Phương trình (5) có một nghiệm là $x=5$ nên có thể **biến đổi về phương trình tích số bằng kỹ thuật nhân liên hợp.**

$(5) \Leftrightarrow \left(\sqrt{3x+1}-4\right)-\left(\sqrt{6-x}-1\right)+3x^2-14x-5=0$ (Tách thành các biểu thức liên hợp)

$\Leftrightarrow \dfrac{3(x-5)}{\sqrt{3x+1}+4}+\dfrac{x-5}{\sqrt{6-x}+1}+(x-5)(3x+1)=0$ (Nhân liên hợp)

$$\Leftrightarrow (x-5)\Bigg[\underbrace{\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{\sqrt{6-x}+1}+(3x+1)}_{>0}\Bigg]=0 \Leftrightarrow x=5$$

♦ Với $x=5 \Rightarrow y=1$ (thỏa điều kiện (*))

♥ Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(5;1)$ ⊗

PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Bước 1: Tìm điều kiện cho các biến x, y của hệ phương trình (nếu có)

Bước 2: Tìm một hệ thức liên hệ đơn giản của x và y bằng phương pháp hàm số

+ Biến đổi một phương trình của hệ về dạng f(u) = f(v) (u, v là các biểu thức chứa x,y)

+ Xét hàm đặc trưng f(t), chứng minh f(t) đơn điệu, suy ra: u = v (đây là hệ thức đơn giản chứa x, y)

Bước 3: Thay hệ thức đơn giản tìm được vào phương trình còn lại của hệ để được phương trình 1 ẩn

Bước 4: Giải phương trình 1 ẩn (cần ôn tập tốt các phương pháp giải phương trình 1 ẩn).

Bài 2: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - y^3 + 17x - 32y = 6x^2 - 9y^2 - 24 & (1) \\ (y+2)\sqrt{x+4} + (x+9)\sqrt{2y-x+9} = x^2 + 9y + 1 & (2) \end{cases}$

(*Thi thử của THPT Chuyên Vĩnh Phúc*)

Bài giải

♥ **Điều kiện:** $\begin{cases} x \geq -4 \\ 2y - x + 9 \geq 0 \end{cases}$ (*)

♥ Khai thác phương trình (1) để **tìm hệ thức liên hệ đơn giản của x và y**

(sử dụng phương pháp hàm số kiểu $f(u) = f(v)$)

♦ $x^3 - y^3 + 17x - 32y = 6x^2 - 9y^2 - 24 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 17x - 18 = y^3 - 9y^2 + 32y - 42$ [Tại sao ?]

$\Leftrightarrow (x-2)^3 + 5(x-2) = (y-2)^3 + 5(y-2)$ (3)

♦ **Xét hàm đặc trưng** $f(t) = t^3 + 5t$ trên $\mathbb{R}$ ta có:

$f'(t) = 3t^2 + 5 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Nên: $(3) \Leftrightarrow f(x-2) = f(y-3) \Leftrightarrow x - 2 = y - 3 \Leftrightarrow y = x + 1$ (4)

♥ **Thế** (4) vào (2) để được phương trình một ẩn

$$(x+3)\sqrt{x+4} + (x+9)\sqrt{x+11} = x^2 + 9x + 10 \quad (5)$$

♦ Phương trình (5) có một nghiệm là $x = 5$ nên có thể **biến đổi về phương trình tích số bằng kỹ thuật nhân liên hợp.**

$(5) \Leftrightarrow (x+3)\left(\sqrt{x+4} - 3\right) + (x+9)\left(\sqrt{x+11} - 4\right) = x^2 + 2x - 35$ (Tách thành các biểu thức liên hợp)

$\Leftrightarrow (x+3).\dfrac{x-5}{\sqrt{x+4}+3} + (x+9).\dfrac{x-5}{\sqrt{x+11}+4} = (x-5)(x+7)$ (Nhân liên hợp)

$\Leftrightarrow (x-5)\left[\dfrac{x+3}{\sqrt{x+4}+3} + \dfrac{x+9}{\sqrt{x+11}+4} - (x+7)\right] = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-5=0 \\ \dfrac{x+3}{\sqrt{x+4}+3}+\dfrac{x+9}{\sqrt{x+11}+4}-(x+7)=0 \end{array}\right. \quad (6)$$

♦ **Chứng minh (6) vô nghiệm**

$$(6) \Leftrightarrow \frac{x+3}{\sqrt{x+4}+3}-\frac{x+5}{2}+\frac{x+9}{\sqrt{x+11}+4}-\frac{x+9}{2}=0$$

[Tại sao ?]

$$\Leftrightarrow \underbrace{(x+5)\left(\frac{1}{\sqrt{x+4}+3}-\frac{1}{2}\right)}_{<0}+\underbrace{(x+9)\left(\frac{1}{\sqrt{x+11}+4}-\frac{1}{2}\right)}_{<0}\underbrace{-\frac{2}{\sqrt{x+4}+3}}_{<0}=0 : \text{phương trình VN}$$

♦ Với $x=5 \Rightarrow y=6$ (thỏa điều kiện (*))

♥ Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(5;6)$ ⊗

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Giải các hệ phương trình

1) $\begin{cases} x^3+y^3=3x^2-6x-3y+4 \\ x^2+y^2-6x+y-10=\sqrt{y+5}-\sqrt{4x+y} \end{cases}$

2) $\begin{cases} (53-5x)\sqrt{10-x}+(5y-48)\sqrt{9-y}=0 \\ \sqrt{2x-y+6}+x^2-2x-66=\sqrt{-2x+y+11} \end{cases}$

3) $\begin{cases} (2012-3x)\sqrt{4-x}+(6y-2009)\sqrt{3-2y}=0 \\ 2\sqrt{7x-8y}+3\sqrt{14x-18y}=x^2+6x+13 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x+\sqrt[3]{x}-y\sqrt{y-1}=0 \\ x^4+\sqrt{x^3-x^2+1}=x(y-1)^3+1 \end{cases}$

Bài 3: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+3}+\sqrt[4]{x-2}-\sqrt{y^4+5}=y & (1) \\ x^2+2x(y-2)+y^2-8y+4=0 & (2) \end{cases}$

(*Phạm Trọng Thư GV THPT Chuyên Nguyễn Quang Diêu, Đồng Tháp – THTT số 2*)

Bài giải

♥ **Điều kiện:** $x \geq 2$ (*)

♥ Khai thác phương trình (1) để **tìm hệ thức liên hệ đơn giản của** x **và** y

♦ $\sqrt{x+3}+\sqrt[4]{x-2}-\sqrt{y^4+5}=y \Leftrightarrow \sqrt[4]{x-2}+\sqrt{(x-2)+5}=y+\sqrt{y^4+5}$ (3)

♦ **Xét hàm đặc trưng** $f(t)=t+\sqrt{t^4+5}$ trên nửa khoảng $[0;+\infty)$.

f liên tục trên $[0;+\infty)$ và $f'(t)=1+\dfrac{2t^3}{\sqrt{t^4+5}}>0, \forall t\in[0;+\infty) \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$

Do $\sqrt[4]{x-2}\geq 0$ và $4y=(x+y-2)^2 \Rightarrow y\geq 0$ nên

$$(3)\Leftrightarrow f\left(\sqrt[4]{x-2}\right)=f(y)\Leftrightarrow \sqrt[4]{x-2}=y\Leftrightarrow x=y^4+2 \quad (4)$$

♥ **Thế** (4) vào (2) để được phương trình một ẩn

$$4y=(y^4+y)^2 \Leftrightarrow y(y^7+2y^4+y-4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y^7+2y^4+y-4=0 \end{array}\right. \quad (5)$$

♦ Giải phương trình (5) bằng **phương pháp hàm số**

Xét hàm số $g(y)=y^7+2y^4+y-4$ trên nửa khoảng $[0;+\infty)$.

Do g liên tục trên $[0;+\infty)$ và $g'(y)=7y^6+8y^3+1>0, \forall y\in[0;+\infty) \Rightarrow g(y)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$

Nên: $(5)\Leftrightarrow g(y)=g(1)\Leftrightarrow y=1$

♣ Với $y=0 \Rightarrow x=2$ [thỏa (*)]

♣ Với $y=1 \Rightarrow x=3$ [thỏa (*)]

♥ Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x;y)$ là $(2;0)$ và $(3;1)$ ⊗

Bài 4: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3-3x-y^3-6y^2-9y-2+\ln\dfrac{x-1}{y+1}=0 & (1) \\ y\left[\log_2(x-3)+\log_3 y\right]=x+1 & (2) \end{cases}$.

(*Thi thử của THPT Chuyên Vĩnh Phúc*)

Bài giải

♥ **Điều kiện:** $\begin{cases} \dfrac{x-1}{y+1}>0 \\ x-3>0 \\ y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3 \\ y>0 \end{cases}$ **(*)**

♥ Khai thác phương trình (1) để **tìm hệ thức liên hệ đơn giản của x và y**

♦ $(1) \Leftrightarrow (x-1)^3+3(x-1)^2+\ln(x-1)=(y+1)^3+3(y+1)^2+\ln(x+1)$ (3)

♦ **Xét hàm đặc trưng** $f(t)=t^3+3t^2+\ln t$ trên khoảng $(0;+\infty)$

$$f'(t)=3t^2+6t+\frac{1}{t}>0\ \forall t>0 \Rightarrow f(t) \text{ đồng biến trên khoảng } (0;+\infty)$$

Do $x-1>0$ và $y+1>0$ nên

$$(3) \Leftrightarrow f(x-1)=f(y+1) \Leftrightarrow x-1=y+1 \Leftrightarrow y=x-2 \quad (4)$$

♥ **Thế** (4) vào (2) để được phương trình một ẩn

$$(x-2)\left[\log_2(x-3)+\log_3(x-2)\right]=x+1 \quad (5)$$

♦ Giải phương trình (5) bằng **phương pháp hàm số**

$$(5) \Leftrightarrow \log_2(x-3)+\log_3(x-2)=\frac{x+1}{x-2} \Leftrightarrow \log_2(x-3)+\log_3(x-2)-\frac{x+1}{x-2}=0 \quad (6)$$

♣ Xét hàm số $g(x)=\log_2(x-3)+\log_3(x-2)-\dfrac{x+1}{x-2}$ trên khoảng $(3;+\infty)$

$$g'(x)=\frac{1}{(x-3)\ln 2}+\frac{1}{(x-2)\ln 3}+\frac{3}{(x-2)^2}>0\ \forall x>3$$

$\Rightarrow g(x)$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

Nên $(6) \Leftrightarrow g(x)=g(5) \Leftrightarrow x=5 \xrightarrow{(4)} y=3$ [thỏa mãn (*)]

♥ Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(5;3)$ ⊗

Bài 5: Giải hệ phương trình:. $\begin{cases} 3x^2+3y^2+8=(y-x)(y^2+xy+x^2+6) & (1) \\ (x+y-13)\left(\sqrt{3y-14}-\sqrt{x+1}\right)=5 & (2) \end{cases}$

(*Thi thử của THPT Chuyên Vĩnh Phúc*)

Bài giải

♥ **Điều kiện**: $\begin{cases} x+1\ge 0 \\ 3y-14\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ y\ge \dfrac{14}{3} \end{cases}$ $(*)$

♥ Khai thác phương trình (1) để **tìm hệ thức liên hệ đơn giản của** x **và** y

♦ $(1) \Leftrightarrow (x+1)^3+3(x+1)=(y-1)^3+3(y-1)$ (3)

♦ **Xét hàm đặc trưng** $f(t)=t^3+3t\ ,t\in\mathbb{R}$

$$f'(t)=3t^2+3>0,\forall t\in\mathbb{R}\Rightarrow f(t) \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}.$$

Do $x+1>0$ và $y-1>0$ nên

$$(3) \Leftrightarrow \quad f(x+1)=f(y-1)\Leftrightarrow x+1=y-1\Leftrightarrow x+2=y \qquad (4)$$

♥ **Thế** (4) vào (2) để được phương trình một ẩn

$$(2x-11)\left(\sqrt{3x-8}-\sqrt{x+1}\right)=5 \qquad (5)$$

♦ Giải phương trình (5) bằng **phương pháp hàm số**

Ta nhận thấy $x=\dfrac{11}{2}$ không là nghiệm của phương trình (5) nên

$$(5)\Leftrightarrow \sqrt{3x-8}-\sqrt{x+1}-\frac{5}{2x-11}=0. \qquad (6)$$

Xét hàm số

$$g(x)=\sqrt{3x-8}-\sqrt{x+1}-\frac{5}{2x-11}\ ,x\in\left[\frac{8}{3};\frac{11}{2}\right)\cup\left(\frac{11}{2};+\infty\right)$$

$$g'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x-8}}-\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+\frac{10}{(2x-11)^2}=\frac{3\sqrt{x+1}-\sqrt{3x-8}}{2\sqrt{(3x-8)(x+1)}}+\frac{10}{(2x-11)^2}>0\ \forall x\in\left(\frac{8}{3};\frac{11}{2}\right)\&\left(\frac{11}{2};+\infty\right)$$

$\Rightarrow g(x)$ đồng biến trên các khoảng $\left(\dfrac{8}{3};\dfrac{11}{2}\right)\&\left(\dfrac{11}{2};+\infty\right)$

♣ Trên khoảng $\left[\dfrac{8}{3};\dfrac{11}{2}\right)$ thì $g(x)$ đồng biến, $3\in\left[\dfrac{8}{3};\dfrac{11}{2}\right), g(3)=0$ nên

$$(6) \Leftrightarrow g(x)=g(3)\Leftrightarrow x=3\xrightarrow{(4)} y=5 \text{ [thoả mãn (*)]}$$

♣ Trên khoảng $\left(\dfrac{11}{2};+\infty\right)$ thì $g(x)$ đồng biến, $8\in\left(\dfrac{11}{2};+\infty\right), g(8)=0$ nên

$$(6) \Leftrightarrow g(x)=g(8)\Leftrightarrow x=8\xrightarrow{(4)} y=10 \text{ [thoả mãn (*)]}$$

♥ Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x,y)=(3;5),(x,y)=(8;10)$ ⊗

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Giải các hệ phương trình

1) $\begin{cases} \left(4x^2+1\right)x+\left(y-3\right)\sqrt{5-2y}=0 \\ 4x^2+y^2+2\sqrt{3-4x}=7 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^3-y^3=3y^2+4y-x+2 \\ \sqrt{x+y}+3\sqrt{x+3y+19}=105-y^3-xy \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sqrt{4x+2}+\sqrt{2y+4}=6 \\ 2\left(2x+1\right)^3+2x+1=\left(2y-3\right)\sqrt{y-2} \end{cases}$

Bài 6: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2y^3+y+2x\sqrt{1-x}=3\sqrt{1-x} & (1) \\ \sqrt{9-4y^2}=2x^2+6y^2-7 & (2) \end{cases}$

(*Thi thử của THPT Trần Phú – Thanh Hóa*)

Bài giải

♥ **Điều kiện:** $\begin{cases} x\le 1 \\ -\frac{3}{2}\le y\le \frac{3}{2} \end{cases}$ (*)

♥ Khai thác phương trình (1) để **tìm hệ thức liên hệ đơn giản của x và y**

(sử dụng phương pháp hàm số kiểu $f(u)=f(v)$)

♦ $2y^3+y+2x\sqrt{1-x}=3\sqrt{1-x} \Leftrightarrow 2y^3+y=2\sqrt{1-x}-2x\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x}$

$$\Leftrightarrow 2y^3+y=2(1-x)\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x} \quad (3)$$

♦ **Xét hàm đặc trưng** $f(t)=2t^3+t$ trên $\mathbb{R}$ ta có:

$$f'(t)=6t^2+1>0, \forall t\in\mathbb{R} \Rightarrow f \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}$$

Nên: $(3)\Leftrightarrow f(y)=f\left(\sqrt{1-x}\right)\Leftrightarrow y=\sqrt{1-x}\Leftrightarrow \begin{cases} y\ge 0 \\ y^2=1-x \end{cases}$ (4)

♥ **Thế** (4) vào (2) để được phương trình một ẩn

$$\sqrt{4x+5}=2x^2-6x-1 \quad (5)$$

♦ Giải phương trình (5) bằng **phương pháp đặt ẩn phụ chuyển về hệ đối xứng loại II**

• Phương trình (5) viết lại thành: $(2x-3)^2=2\sqrt{4x+5}+11$

Điều kiện

Đặt $\sqrt{4x+5}=2t-3$ $\left(t\ge \frac{3}{2}\right)$, ta được hệ phương trình: [Tại sao ?]

$$\begin{cases} (2x-3)^2=4t+5 & (6) \\ (2t-3)^2=4x+5 & (7) \end{cases}$$

• Trừ theo từng vế của (6) và (7) ta được:

$$4(x+t-3)(x-t)=4t-4x \Leftrightarrow (x-t)(x+t-2)=0$$

+ Khi $x=t$, thay vào (7) ta được:

$$4x^2-12x+9=4x+5\Leftrightarrow x^2-4x+1=0\Leftrightarrow x=2\pm\sqrt{3}$$

So với điều kiện của x và t ta chọn $x=2+\sqrt{3}$. [không thỏa mãn (*)]

+ Khi $x+t-2=0\Leftrightarrow t=2-x$, thay vào (7) ta được:

$$(1-2x)^2 = 4x+5 \Leftrightarrow x^2-2x-1=0 \Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{2} \quad \text{(loại)}$$

So với điều kiện của x và t ta chọn $x=1-\sqrt{2}$.

♦ Với $x=1-\sqrt{2} \Rightarrow \ y=\pm\sqrt[4]{2}$. [thỏa mãn (*)]

♥ Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x;y)$ là $\left(1-\sqrt{2};-\sqrt[4]{2}\right)$ và $\left(1-\sqrt{2};\sqrt[4]{2}\right)$ ⊗

Bài 7: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^3-4x^2+3x-1=2x^3(2-y)\sqrt{3-2y} & (1) \\ \sqrt{x+2}=\sqrt[3]{14-x\sqrt{3-2y}}+1 & (2) \end{cases}$

(Thi thử của THPT Chuyên Lê Quý Đôn – Đà Nẵng)

Bài giải

♥ Điều kiện: $\begin{cases} y\le \dfrac{3}{2} \\ x\ge -2 \end{cases}$ (*)

♥ Khai thác phương trình (1) để **tìm hệ thức liên hệ đơn giản của x và y**

(sử dụng phương pháp hàm số kiểu $f(u)=f(v)$)

♦ Do $x=0$ không thỏa hệ nên ta có:

$$(1) \Leftrightarrow 2-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}=2(2-y)\sqrt{3-2y}$$

$$\Leftrightarrow \left(1-\frac{1}{x}\right)^3+\left(1-\frac{1}{x}\right)=(3-2y)\sqrt{3-2y}+\sqrt{3-2y} \qquad (3)$$

♦ **Xét hàm đặc trưng** $f(t)=t^3+t$ trên $\mathbb{R}$ ta có:

$$f'(t)=3t^2+1>0, \forall t\in\mathbb{R} \Rightarrow f \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}$$

Nên: $(3) \Leftrightarrow f\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=f\left(\sqrt{3-2y}\right) \Leftrightarrow 1-\dfrac{1}{x}=\sqrt{3-2y}$ (4)

♥ **Thế** (4) vào (2) để được phương trình một ẩn

$$\sqrt{x+2}=\sqrt[3]{15-x}+1 \qquad (5)$$

♦ Phương trình (5) có một nghiệm là $x=7$ nên có thể **biến đổi về phương trình tích số bằng kỹ thuật nhân liên hợp.**

$$(5) \Leftrightarrow \sqrt{x+2}-3+2-\sqrt[3]{15-x}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-7)\left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{x+2}+3}+\frac{1}{4-2\sqrt[3]{x+15}+\left(\sqrt[3]{x+15}\right)^2}}_{>0}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x=7$$

♦ Với $x=7 \Rightarrow y=\frac{111}{98}$ [thỏa mãn (*)]

♥ Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ là $\left(7;\frac{111}{98}\right)$ ⊗

Bài 8: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+3y+1=y^2-\frac{1}{y}+\frac{3x+4}{\sqrt{x+1}} & (1) \\ \sqrt{9y-2}+\sqrt[3]{7x+2y+2}=2y+3 & (2) \end{cases}$

(Thi thử của THPT Chuyên Lê Quý Đôn – Đà Nẵng)

Bài giải

♥ Điều kiện: $\begin{cases} x>-1 \\ y\ge \frac{2}{9} \end{cases}$ (*)

♥ Khai thác phương trình (1) để **tìm hệ thức liên hệ đơn giản của x và y**

(sử dụng phương pháp hàm số kiểu $f(u)=f(v)$)

♦ Ta có $(1) \Leftrightarrow y^2-\frac{1}{y}-3y=x+1-\frac{1}{\sqrt{x+1}}-3\sqrt{x+1}$ (3)

♦ **Xét hàm đặc trưng** $f(t)=t^2-\frac{1}{t}-3t$ trên $(0;+\infty)$ ta có:

$$f'(t)=\frac{(2t+1)(t-1)^2}{t^2}\ge 0, \forall t\in(0;+\infty) \Rightarrow f \text{ đồng biến trên } (0;+\infty)$$

Nên: $(3)\Leftrightarrow f(y)=f\left(\sqrt{x+1}\right)\Leftrightarrow y=\sqrt{x+1}\Leftrightarrow x=y^2-1$ (4)

♥ Thế (4) vào (2) để được phương trình một ẩn

$$\sqrt{9y-1}+\sqrt[3]{7y^2+2y-5}=2y+3 \quad (5)$$

♦ Phương trình (5) có hai nghiệm là $y=2$ $y=3$ và nên có thể biến đổi về phương trình tích số bằng kỹ thuật nhân liên hợp. Định hướng biến đổi về dạng $(y-2)(y-3).h(x)=0$ hay $(y^2-5y+6).h(x)=0$

$$(5) \Leftrightarrow \sqrt{9y-2}-(y+2)+\sqrt[3]{7y^2+2y-5}-(y+1)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2-5y+6}{\sqrt{9y-2}+y+2}+\frac{(y+1)(y^2-5y+6)}{(y+1)^2+(y+1)\sqrt[3]{7y^2+2y-5}+\left(\sqrt[3]{7y^2+2y-5}\right)^2}=0$$

$$\Leftrightarrow (y^2-5y+6)\left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{9y-2}+y+2}+\frac{y+1}{(y+1)^2+(y+1)\sqrt[3]{7y^2+2y-5}+\left(\sqrt[3]{7y^2+2y-5}\right)^2}}_{>0}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \; y^2 - 5y + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 2 \\ y = 3 \end{array}\right.$$

♦ Với $y = 2 \;\Rightarrow\; x = 3$ [thỏa mãn (*)]

♦ Với $y = 3 \;\Rightarrow\; x = 8$ [thỏa mãn (*)]

♥ Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ là $(3;2)$; $(8;3)$ ⊗

Bài 9: Giải hệ phương trình:. $\begin{cases} x^2 + y^2 - y = (2x+1)(y-2) & (1) \\ \sqrt{3x-8} - \sqrt{y} = \dfrac{5}{x+y-2} & (2) \end{cases}$

Bài giải

♥ **Điều kiện**: $\begin{cases} x \ge \dfrac{8}{3} \\ y \ge 0 \\ x + y - 12 \ne 0 \end{cases}$ (*)

♥ Khai thác phương trình (1) để **tìm hệ thức liên hệ đơn giản của x và y**

♦ $(1) \Leftrightarrow (y - x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow y = x + 1$ (3)

♥ **Thế** (3) vào (2) để được phương trình một ẩn

$$\sqrt{3x-8} - \sqrt{x+1} = \frac{5}{2x-11} \qquad (5)$$

♦ Giải phương trình (5) bằng **phương pháp hàm số**

$$(5) \Leftrightarrow \sqrt{3x-8} - \sqrt{x+1} - \frac{5}{2x-11} = 0. \qquad (6)$$

Xét hàm số

$$f(x) = \sqrt{3x-8} - \sqrt{x+1} - \frac{5}{2x-11}, x \in \left[\frac{8}{3}; \frac{11}{2}\right) \cup \left(\frac{11}{2}; +\infty\right)$$

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x-8}} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{10}{(2x-11)^2} = \frac{3\sqrt{x+1} - \sqrt{3x-8}}{2\sqrt{(3x-8)(x+1)}} + \frac{10}{(2x-11)^2} > 0 \;\; \forall x \in \left(\frac{8}{3}; \frac{11}{2}\right) \& \left(\frac{11}{2}; +\infty\right)$$

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên các khoảng $\left(\frac{8}{3}; \frac{11}{2}\right) \& \left(\frac{11}{2}; +\infty\right)$

♣ Trên khoảng $\left[\frac{8}{3}; \frac{11}{2}\right)$ thì $f(x)$ đồng biến, $3 \in \left[\frac{8}{3}; \frac{11}{2}\right)$, $f(3) = 0$ nên

$$(6) \;\Leftrightarrow\; f(x) = f(3) \Leftrightarrow x = 3 \xrightarrow{(4)} y = 4 \;\; \text{[thoả mãn (*)]}$$

♣ Trên khoảng $\left(\frac{11}{2}; +\infty\right)$ thì $f(x)$ đồng biến, $8 \in \left(\frac{11}{2}; +\infty\right)$, $f(8) = 0$ nên

$$(6) \;\Leftrightarrow\; f(x) = f(8) \Leftrightarrow x = 8 \xrightarrow{(4)} y = 9 \;\; \text{[thoả mãn (*)]}$$

♥ Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x, y) = (3;5), (x, y) = (8;10)$ ⊗

XEM THÊM PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ DẠNG TRÊN

CÁCH GIẢI PHƯƠNG TRÌNH DẠNG

$$(ax+b)^n = p\sqrt[n]{a'x+b'}+qx+r$$

(x là ẩn số; p,q,r,a,b,a',b' là các hằng số; $paa'\neq 0$; $n\in\{2;3\}$

Dạng thường gặp: $(ax+b)^2 = p\sqrt{a'x+b'}+qx+r$

1. Phương pháp giải

Đặt ẩn phụ:

+ Đặt $\sqrt[n]{a'x+b'} = ay+b$ nếu $pa'>0$

+ Đặt $\sqrt[n]{a'x+b'} = -(ay+b)$ nếu $pa'<0$

Bài toán dẫn đến giải hệ phương trình hai ẩn đối với x và y:

$$\begin{cases} h(x) = Ay+Bx+C \\ h(y) = (A'+B)x+C' \end{cases} \quad (*)$$

(*) thường là hệ đối xứng loại 2 đối với x và y.

Chú ý: Có thể sử dụng phương pháp nâng lũy thừa để đưa về phương trình bậc bốn.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Giải phương trình $\sqrt{2x+15} = 32x^2+32x-20$ (1)

Lời giải

- Điều kiện: $2x+15\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -\dfrac{15}{2}$
- Phương trình (1) viết lại thành: $2(4x+2)^2 = \sqrt{2x+15}+28$

Đặt $\sqrt{2x+15} = 4y+2$ $\left(y\geq -\dfrac{1}{2}\right)$, ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} (4y+2)^2 = 2x+15 & (2) \\ (4x+2)^2 = 2y+15 & (3) \end{cases}$$

- Trừ theo từng vế của (2) và (3) ta được:

$$(4y+4x+4)(4y-4x)=2(x-y) \Leftrightarrow (x-y)[1+8(x+y+1)]=0$$

+ Khi $x=y$, thay vào (3) ta được:

$$(4x+2)^2=2x+15 \Leftrightarrow 16x^2+14x-11=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2} \\ x=-\dfrac{11}{8} \end{array}\right.$$

So với điều kiện của x và y ta chọn $x=\dfrac{1}{2}$.

+ Khi $1+8(x+y+1)=0 \Leftrightarrow y=-x-\dfrac{9}{8}$, thay vào (3) ta được:

$$(4x+2)^2=-2x-\frac{9}{4}+15 \Leftrightarrow 64x^2+72x-35=0 \Leftrightarrow x=\frac{-9\pm\sqrt{221}}{16}$$

So với điều kiện của x và y ta chọn $x=\dfrac{-9+\sqrt{221}}{16}$.

- Tập nghiệm của (1) là $S=\left\{\dfrac{1}{2};\dfrac{-9+\sqrt{221}}{16}\right\}$ ⊗

Ví dụ 2: Giải phương trình $4x^2+\sqrt{3x+1}+5=13x$ (1)

Lời giải

- Điều kiện: $3x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -\dfrac{1}{3}$
- Phương trình (1) viết lại thành: $(2x-3)^2=-\sqrt{3x+1}+x+4$

Đặt $\sqrt{3x+1}=-(2y-3)$ $\left(y\leq \dfrac{3}{2}\right)$, ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} (2x-3)^2=2y+x+1 & (2) \\ (2y-3)^2=3x+1 & (3) \end{cases}$$

- Trừ theo từng vế của (2) và (3) ta được:

$$2(2x+2y-6)(x-y)=2y-2x \Leftrightarrow (x-y)(2x+2y-5)=0$$

+ Khi $x=y$, thay vào (3) ta được:

$$4x^2-12x+9=3x+1 \Leftrightarrow 4x^2-15x+8=0 \Leftrightarrow x=\frac{15\pm\sqrt{97}}{8}$$

So với điều kiện của x và y ta chọn $x=\dfrac{15-\sqrt{97}}{8}$.

+ Khi $2x+2y-5=0 \Leftrightarrow 2y=5-2x$, thay vào (3) ta được:

$$(2-2x)^2=3x+1 \Leftrightarrow 4x^2-11x+3=0 \Leftrightarrow x=\frac{11\pm\sqrt{73}}{8}$$

So với điều kiện của x và y ta chọn $x=\frac{11+\sqrt{73}}{8}$.

- Tập nghiệm của (1) là $S=\left\{\frac{11+\sqrt{73}}{8};\frac{15-\sqrt{97}}{8}\right\}$ ⊗

3. Một số bài toán tự luyện

Giải các phương trình

1) $\sqrt{x+6}=x^2+4x$ 2) $x^2-4x-3=\sqrt{x+5}$ 3) $\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1=0$

4) $4x^2+14x+11=4\sqrt{6x+10}$ 5) $9x^2+12x-2=\sqrt{3x+8}$ 7) 6) $9x^2-6x-5=\sqrt{3x+5}$

---------------------------------Hết----------------------------------